Лекція № 7

Гамильтонова механіка. Рівняння Гамільтона.

> Гамільтон, мабуть, був наділений якимсь дивовижним даром, щоб проникнути в саму суть.
>
> П. А. М. Дірак

У лекції № 2 ми познайомилися з лагранжевим підходом до механіки і виведенням ***рівнянь Лагранжа*** для узагальнених координат, як це і було зроблено Лагранжем. Але в лекції № 3 було показано, як ці рівняння можуть бути виведені з іншого принципу – ***принципу найменшої дії***. Цей принцип вперше в спрощеній формі був сформульований П'єром Луї де Мопертюї (1698-1759), який в 1744 році висунув його у вигляді: «кількість дії, необхідне для того, щоб зробити деяку зміну в природі, є найменш можливим». «Дію» він визначив, як добуток $m \cdot v \cdot l$ – маси, швидкісті та пройденого шляху. З огляду на те, що швидкість змінюється з часом, необхідно цей вираз представити у вигляді $\int mvdl = \int mv\,vdt = \int 2Tdt$, де T – кінетична енергія.

Вільям Роуен Гамільтон (1806-1865) показав, що рівняння Лагранжа (1736-1813), які були виведені з «локального» (диференціального) принципу, можуть бути виведені з «інтегрального» принципу, як мінімальність інтеграла від дещо іншої, ніж у Мопертюї функції, а саме – функції Лагранжа. ***Інтегральний принцип Гамільтона*** стає початковим принципом механіки.

Гамільтоном був сформульований інший підхід до механіки, який пізніше виявився дуже продуктивним, особливо при формулюванні принципів квантової механіки і зв'язку її з класичною. Зрозуміло, що рівняння Лагранжа, які є диференціальними рівняннями другого порядку з похідними від узагальнених координат, можна уявити, як систему диференціальних рівнянь першого порядку. Наприклад, рівняння осцилятора $m\ddot{x} + kx = 0$ можна представити у вигляді системи двох рівнянь першого порядку для координат і швидкості:

$$\dot{x} = v\,, \qquad \dot{v} = -kx / m\,. \tag{19.1}$$

Такий підхід призводить до можливості аналізу динаміки системи на фазовій площині і якісним методам механіки. Ця ідея зниження порядку рівнянь за рахунок подвоєння числа невідомих лежить в основі гамільтонової механіки. Однак, в якості нових незалежних змінних вибираються не узагальнені координати і швидкості (які в механіці Лагранжа являють собою похідні від узагальнених координат), а узагальнені координати і узагальнені імпульси. Нагадаємо, що в лагранжевой механіці імпульси не завжди являють собою $m\dot{q}$, а в загальному випадку мають наступний вигляд:

$$p_i = \frac{\partial L\left(q_i, \dot{q}_i, t\right)}{\partial \dot{q}_i}. \tag{19.2}$$

Перехід від одного набору змінних $\left(q_i, \dot{q}_i\right)$ до нового $\left(q_i, p_i\right)$ здійснюється за допомогою так званого ***перетворення Лежандра***, яке виконується в лагранжіані. Обчислимо повний диференціал від функції Лагранжа:

$$dL\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \tag{19.3}$$

Скориставшись визначенням імпульсів (19.2) і рівняннями Лагранжа в формі $\dot{p}_i = \partial L / \partial q_i$, перепишемо (19.3) в формі

$$dL\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) = \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt, \tag{19.4}$$

і уявімо другий доданок у вигляді

$$\sum_i p_i d\dot{q}_i = \sum_i d\left(p_i \dot{q}_i\right) - \sum_i \dot{q}_i dp_i. \tag{19.5}$$

Після цього отримаємо

$$d\left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L\right) = \sum_i \left(\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i\right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \tag{19.6}$$

Порівнюючи вирази (19.4) і (19.6), ми бачимо, що в правій частині (19.4) стоять диференціали $dq_i, d\dot{q}_i, dt$ змінних функції Лагранжа влевой частини. У правій частині (19.6) стоять диференціали dq_i, dp_i, dt, які є змінними функції, що стоїть в лівій частині. Таким чином, ми повинні перейти до цих змінних і в лівій частині (19.6). З визначення імпульсів (19.2)

$$p_i = \frac{\partial L\left(q_i, \dot{q}_i, t\right)}{\partial \dot{q}_i} = f\left(q_i, \dot{q}_i, t\right), \tag{19.7}$$

розглянутих, як систему алгебраїчних рівнянь відносно q_i, $\dot{q}_i$ і p_i, висловимо узагальнені швидкості через узагальнені координати, імпульси і час. З теорем про неявні функції відомо, що за умови $\det\left|\partial f_i / \partial \dot{q}_k\right| \neq 0$ система рівнянь (19.7) розв'язна щодо швидкостей:

$$\dot{q}_i = g_i\left(q, p, t\right). \tag{19.8}$$

Підставивши ці вирази в ліву частину (19.6), отримаємо для неї вираз

$$d\left(\sum_i p_i\dot{q}_i - L\left(q_i, \dot{q}_i, t\right)\right) = d\left(\sum_i p_i g_i\left(p, q, t\right) - L\left(q_i, g_i\left(p, q, t\right), t\right)\right). \tag{19.9}$$

Розуміється в такому сенсі, функція, що стоїть під диференціалом називається ***функцією Гамільтона*** або ***гамільтоніаном***:

$$H\left(p_i, q_i, t\right) = \sum_i p_i\dot{q}_i - L\left(q_i, \dot{q}_i, t\right)\Big|_{\dot{q}=g\left(p,q,t\right)}. \tag{19.10}$$

З порівняння диференціала цієї функції

$$dH\left(q_i, p_i, t\right) = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \tag{19.11}$$

з виразом (19.6) слідує наступна система диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \tag{19.12}$$

і рівняння

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}\ . \tag{19.13}$$

Рівняння (19.12) називаються ***рівняннями Гамільтона або канонічними рівняннями.***

У той час як у лагранжевому підході узагальнена швидкість була похідною від узагальненої координати, у гамільтоновому підході узагальнені координати та імпульси є незалежними змінними, пов'язаними лише рівняннями Гамільтони. При цьому імпульс втрачає свій наочний вигляд добутку маси на швидкість. Тому в загальному випадку можна говорити про ***гамільтонову динаміку і гамільтонову систему***, як про таку, в якій існує якась функція $H\left(p_1,..,p_N;q_1,...,q_N;t\right)$ двох наборів незалежних змінних, для яких визначені їх часові похідні як $\dot{q}=\partial H/\partial p$ і $\dot{p}=-\partial H/\partial q$. Ці два набори змінних називають ***канонічними змінними*** або ***канонічно спряженими величинами***, а самі рівняння – ***канонічними***.

Функція Гамільтона має простий сенс. Якщо згадати *визначення енергії* в лагранжевой механіці, як інтеграла руху, що має вигляд $E=\sum\dot{q}_i\partial L/\partial\dot{q}_i-L,$ то з (19.10) випливає, що гамільтоніан являє собою енергію, виражену в термінах узагальнених координат і імпульсів.

Для прикладу розглянемо рівняння для комплексної змінної $i\dot{\psi}=\omega_0\psi$, що вже використовувалось в попередніх лекціях. Видно, що це рівняння разом з його комплексним сполученням

$$\dot{\psi}=-i\omega_0\psi\,,\quad i\dot{\bar{\psi}}=\omega_0\bar{\psi} \tag{19.14}$$

можуть бути записаними в гамільтоновій формі. Дійсно, рівняння (19.14) для узагальнених змінних ψ і $\bar{\psi}$ є лагранжевими з функцією Лагранжа

$$L=i\left(\dot{\psi}\bar{\psi}-\dot{\bar{\psi}}\psi\right)/2-\omega_0\psi\bar{\psi}. \tag{19.15}$$

Узагальнені імпульси, що відповідають узагальненим координатам ψ і $\bar{\psi}$, мають вигляд $p_\psi=i\bar{\psi}/2$ і $p_{\bar{\psi}}=-i\psi/2$. Відповідна лагранжіану (19.15) енергія має вигляд $E=-\omega_0\psi\bar{\psi}$ і може бути переписана в термінах узагальнених координат і імпульсів у вигляді такого гамільтоніана:

$$H=i\omega_0\left(\bar{\psi}p_{\bar{\psi}}-\psi p_\psi\right). \tag{19.16}$$

Легко перевірити, що рівняння гамільтоніана з гамільтоніаном (19.16)

$$\dot{\psi}=\partial H/\partial p_\psi,\quad \dot{p}_\psi=-\partial H/\partial\psi,\quad \dot{\bar{\psi}}=\partial H/\partial p_{\bar{\psi}},\quad \dot{p}_{\bar{\psi}}=-\partial H/\partial\bar{\psi}$$

збігаються з рівняннями (19.14).

Вище рівняння Гамільтона були отримані за допомогою перетворення Лежандра, застосованого до диференціала функції Лагранжа. При цьому, при переході від формули (19.3) до формули (19.4) ми скористалися рівняннями Лагранжа. Але вони в свою чергу були отримані з варіаційного принципу (звичайного принципу Гамільтона). Зараз ми покажемо, як рівняння Гамільтона можна отримати безпосередньо з варіаційного принципу (принципу наймешої дії). Замість звичайного принципу $\delta S=\delta\int Ldt=0$

скористаємося зв'язком функції Лагранжа з енергією $E = p\dot{q} - L$ і модифікуємо цей принцип таким чином

$$\delta S = \delta \int \left(p\dot{q} - E \right) dt = \delta \int \left(p\dot{q} - H\left(p, q \right) \right) dt = 0 \,. \tag{19.17}$$

Проведемо варіювання і врахуємо комутування варіації і похідної за часом:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \left(\delta p \, \dot{q} + p \frac{d}{dt} \delta q - \frac{\partial H}{\partial p} \delta p - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q \right) dt = \\ &= p \delta q \Big|_{t1}^{t2} + \int \left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \delta p dt - \int \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \delta q dt = 0 \end{aligned}.$$

Якщо, як і раніше, не варіювати граничні умови, то з рівності нулю коефіцієнтів при δp і δq випливають рівняння Гамільтона (19.12). Треба звернути увагу на те, що в модифікованому принципі координати і імпульси варіюються незалежно на відміну від лагранжева підходу, в якому варіювалася тільки координата. Збільшення в два рази числа незалежних змінних є важливою властивістю гамільтонового підходу.

Функція Рауса. У різних завданнях використання лагранжевого або гамільтонового підходів мають свої переваги. Наприклад, якщо якась змінна не входить в лагранжіан, то щодо цієї змінної (званої ***циклічної***), зручнішим є гамільтовий опис механіки. У лагранжевом підході з циклічності координати q_0 є наслідок, що $\partial L / \partial q_0 = 0$, і отже $\left(d / dt \right) \left(\partial L / \partial \dot{q}_0 \right) = 0$. Звідси тільки виходить алгебраїчне рівняння, що визначає тільки вираз $\dot{q}_0 = f\left(q_i, \dot{q}_i \right)$. Тут кращим є гамільтонів підхід. З рівняння Гамільтона для цієї узагальненої координати маємо $\dot{p}_0 = -\partial H / \partial q_0$, і отже, величина відповідного узагальненого імпульсу зберігається: $p_0 = const$. Однак, для інших координат більш зручними можуть виявитися лагранжеві змінні. Тому іноді використовують підхід, в якому за одними змінними записуються лагранжеві рівняння, а за іншими – гамільтонові **(метод Едварда Рауса** виключення циклічних змінних).

Розділимо всі змінні динамічної системи на дві групи: q і ξ (у кожній групі може бути кілька змінних), і по змінним q перейдемо до гамільтонових змінних, тобто. здійснимо перехід від змінних $q, \dot{q}, \xi, \dot{\xi}$ до змінних $q, p, \xi, \dot{\xi}$. Перехід цей проведемо за допомогою перетворення Лежандра, як і на початку лекції

$$dL\left(q,\dot{q},\xi,\dot{\xi}\right)=\frac{\partial L}{\partial q}dq+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}d\dot{q}+\frac{\partial L}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}d\dot{\xi}=$$

$$=\dot{p}dq+pd\dot{q}+\frac{\partial L}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}d\dot{\xi}. \qquad (19.18)$$

Виділяючи з другого доданку повний диференціал, отримуємо

$$d\left(L-p\dot{q}\right)=\dot{p}dq-\dot{q}dp+\frac{\partial L}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}d\dot{\xi}. \qquad (19.19)$$

По першій змінній ми перейшли до гамільтонових змінних. Але треба пам'ятати, що у другому доданку величину швидкості $\dot{q}$ необхідно виразити через ці гамільтонові змінні за допомогою співвідношення $\partial L/\partial\dot{q}=p$.

Введемо ***функцію Рауса***

$$R\left(q,p;\xi,\dot{\xi}\right)=p\dot{q}-L. \qquad (19.20)$$

З (19.19) випливає, що диференціал функції Рауса має вигляд

$$dR=-\dot{p}dq+\dot{q}dp-\frac{\partial L}{\partial \xi}d\xi-\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}d\dot{\xi}. \qquad (19.21)$$

Звідси випливає, що по першій змінній виникають гамільтонові рівняння

$$\dot{q}=\frac{\partial R}{\partial p}, \qquad \dot{p}=-\frac{\partial R}{\partial q}, \qquad (19.22)$$

а за другою змінною рівняння зберігають вигляд лагранжових. Справді, з (19.21) випливає, що

$$\frac{\partial R}{\partial \xi}=-\frac{\partial L}{\partial \xi} \quad \text{и} \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}}=-\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}, \qquad (19.23)$$

і з рівнянь Лагранжа отримуємо

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}}=\frac{\partial R}{\partial \xi}. \qquad (19.24)$$

Як зазначалося, метод Рауса був запропонований для виключення циклічних змінних. Продемонструємо це.

Якщо q – циклічна змінна, то вона не входить у функцію Рауса, і ця функція має вигляд $R = R\left(p, \xi, \dot{\xi}\right) = R\left(p_0, \xi, \dot{\xi}\right)$, де p_0 – постійне значення імпульсу. Тому рівняння (19.24) повністю відділяється для змінних ξ і $\dot{\xi}$. (При цьому частина проблеми для змінних (q, p) ми не вирішували). Якщо нам вдасться вирішити спрощену систему рівнянь:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R\left(p_0, \xi, \dot{\xi}\right)}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial R\left(p_0, \xi, \dot{\xi}\right)}{\partial \xi} \tag{19.25}$$

і знайти явну залежність $\xi = \xi(t, p_0)$, то з рівнянь (19.22) ми відразу знаходимо часову залежність координати $q(t)$, інтегруючи результат

$$\dot{q} = \frac{\partial R}{\partial p}\left(p_0, \xi(t, p_0), \dot{\xi}(t, p_0)\right) \tag{19.26}$$

за часом.

Задача. Наближені рівняння руху центру двовимірного вихору з координатами (X, Y) мають вигляд

$$\dot{X} = \partial E(X, Y) / \partial Y, \quad \dot{Y} = -\partial E(X, Y) / \partial X .$$

Знайти для цієї системи гамільтонові рівняння руху.

(Підказка: знайдіть спочатку функцію Лагранжа і узагальнені імпульси вихору).